

A.M.	ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΤΟΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ
!!! μόνον άρτιοι !!!			

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΥΡΙΑΚΟΣ Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ
ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ Α.Μ.
(ΠΤΥΧΙΑΚΗ) ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ
23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2017

1. Εξετάστε αν ισχύει καθένα από τα ακόλουθα. Αν ισχύει, δώστε **πλήρη απόδειξη**. Αν δεν ισχύει, δώστε κατάλληλο **αντιπαράδειγμα**.

- (i) **(5%)** Αν η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι **φθίνουσα**, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ **συγκλίνει**.
- (ii) **(5%)** Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n b_n)$ **συγκλίνει**, τότε **και οι δυο** σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ συγκλίνουν.
- (iii) **(5%)** Αν μια συνάρτηση είναι **παραγωγίσιμη**, τότε είναι και **ομοιόμορφα** συνεχής.
- (iv) **(5%)** Αν το **ολοκλήρωμα** μιας συνάρτησης ισούται με μηδέν, τότε **όλα** τα άνω αθροίσματα ισούνται με μηδέν.

2. (20%) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \int_{-\log(1-x)}^{\log(1+x)} e^{e^t} dt, \quad x \in (0, 1),$$

είναι **αύξουσα**, **χωρίς** να υπολογίσετε κάποιο ολοκλήρωμα.

3. (20%) Ας είναι $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα, με $0 \in I$, και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $0 < f'(x) \leq 1$, για όλα τα $x \in I$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^x f^3(t) dt \leq \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2, \quad \text{για όλα τα } x \in I.$$

4. (20%) Θεωρούμε μια τυχούσα ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και την ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $b_n = \frac{a_n}{1 + a_n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ απειρίζεται θετικά **αν και μόνον αν** η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ απειρίζεται θετικά.

5. (20%) Θεωρούμε τον κύκλο K_1 με κέντρο το σημείο $(0, 0)$ και ακτίνα 1 και τον κύκλο K_2 με κέντρο το σημείο $(1, 0)$ και ακτίνα $\sqrt{2}$. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου $K_2 \setminus K_1$, **χωρίς** να θεωρήσετε γνωστό ότι το εμβαδόν E του κύκλου ακτίνας r δίνεται από τον τύπο $E = \pi r^2$.